ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ:

Άσκηση 1: Έστω $\varphi : \Sigma_\nu \to \mathbb{Z}_2$ με τύπο:

$$\varphi(f) = \begin{cases} \bar{0}, & f \text{ άρτια μετάθεση} \\ \bar{1}, & f \text{ περιττή μετάθεση} \end{cases}$$

Νδο φ ομομορφισμός.

ΛΥΣΗ

Έστω $f, g \in \Sigma_\nu$ και θδο $\varphi(fg) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$

Καταρχάς $fg \in \Sigma_\nu$ (πράξη κλειστή)

Εάν f, g άρτιες μεταθέσεις $\Rightarrow$ fg άρτια μετάθεση

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(f) \oplus \varphi(g) = \bar{0} \oplus \bar{0} = \bar{0} \\ \varphi(fg) = \bar{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(fg) = \varphi(f) \oplus \varphi(g)$$

Εάν f, g περιττές μεταθέσεις $\Rightarrow$ fg άρτια μετάθεση

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(f) \oplus \varphi(g) = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{0} \\ \varphi(fg) = \bar{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(fg) = \varphi(f) \oplus \varphi(g)$$

Εάν f άρτια & g περιττή $\Rightarrow$ f γράφεται ως "γινόμενο" άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων & g γράφεται ως "γινόμενο" περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων $\Rightarrow$ $f \cdot g$ περιττή μετάθεση

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(f) \oplus \varphi(g) = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \\ \varphi(fg) = \bar{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(fg) = \varphi(f) \oplus \varphi(g)$$

(όμοια λόγω συμμετρίας για την περίπτωση όπου f περιττή και g άρτια μετάθεση, φ ομομορφισμός)

Συνεπώς, αναληθευτικά αν το δούμε η φ ορίζει ομομορφισμό στις ομάδες Σ_ν και $\mathbb{Z}_2$

Άσκηση 2: Έστω $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ με τύπο:

$\varphi(m) = r$ με r: υπόλοιπο της διαίρεσης του m με το n

Νδο φ ομομορφισμός

ΛΥΣΗ

Θδο για τυχόντα m και k στο $\mathbb{Z}$ ισχύει

$\varphi(m+k) = \varphi(m) + \varphi(k) := r_1 + r_2$

Παρακινούμενοι από την ευφώνηση:

$\underbrace{m = l_1 n + r_1}_{①}$ και $\underbrace{k = l_2 n + r_2}_{②}$ όπου $0 \leq r_1 < n$, $0 \leq r_2 < n$

Έτσι, r_1+r_2 θα είναι και αυτό με τη σειρά του

$r_1+r_2 = l_3 n + r_3$, $0 \le r_3 < n$ ③

Επιπλέον, προσθέτοντας κατά μέλη τις ① και ②

$m+k = l_1 n + l_2 n + r_1 + r_2 = (l_1+l_2+l_3)n + r_3$, $0 \le r_3 < n$

Άρα, δείξαμε ότι: $\varphi(m+k) = r_3$: το υπόλοιπο της διαίρεσης του $m+k$ με το n

Από την άλλη μεριά:

$\varphi(m) = r_1$ και $\varphi(k) = r_2 \overset{③}{\rightsquigarrow} \varphi(m)+\varphi(k) = r_1+r_2 = l_3 \cdot n + r_3$

άρα και το $\varphi(m)+k$ με το n αν διαιρεθούν μας αφήνουν υπόλοιπο ίσο με r_3

<u>Άσκηση 3</u>: Να εξεταστεί αν οι ακόλουθες απεικονίσεις είναι ομομορφισμοί ομάδων:

i) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ (πρόσθεσης) τύπου $\varphi(x) = [x]$, όπου $[x]$ ο μεγαλύτερος ακέραιος $\le x$

ii) $\varphi: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$ που ορίζεται από τον τύπο $\varphi(x) :=$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το 2

iii) $\varphi: G \to G$ ορισμένη από τον τύπο $\varphi(a) = a^{-1}$, $\forall a \in G$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $\varphi(x_1+x_2) = [x_1+x_2] \geq [x_1]+[x_2] = \varphi(x_1)+\varphi(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Για να αποκλείσουμε την ισότητα παίρνουμε ένα παράδειγμα

$[3,3+1,9] = [5,2] = 5 > [3,3]+[1,9] = 3+1 = 4$

ii) Εδώ μπορεί να λυθεί όπως η άσκηση 2 αλλά θα δείξουμε έναν διαφορετικό & πιο άμεσο τρόπο

$\varphi(\bar{0}) = \varphi(\bar{2}) = \varphi(\bar{4}) = \bar{0} \in \mathbb{Z}_2$ και $\varphi(\bar{1}) = \varphi(\bar{3}) = \varphi(\bar{5}) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$

Έτσι, (όπως στην άσκηση 1) μετασχηματίσαμε το πρόβλημα μας παίρνοντας ουσιαστικά την $\Sigma_\nu \cong \mathbb{Z}_2$

Έτσι, $\varphi(\bar{a})+\varphi(\bar{b}) = \bar{0}+\bar{0} = \bar{0} = \varphi(\bar{a}+\bar{b})$, $\bar{a}, \bar{b}$ άρτιοι

$\varphi(\bar{a})+\varphi(\bar{b}) = \bar{0}+\bar{1} = \varphi(\bar{a}+\bar{b})$, $\bar{a}$ άρτιος & $\bar{b}$ περιττός

$\varphi(\bar{a})+\varphi(\bar{b}) = \bar{1}+\bar{1} = 0 = \varphi(\bar{a}+\bar{b})$, $\bar{a}, \bar{b}$ περιττοί

Άσκηση 4 : Να αποδείξετε ότι:
$\varphi: \mathbb{Z}_4 \to GL(2,\mathbb{C})$ με τύπο: $\varphi(1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και
$\varphi(n) = \varphi(n \cdot 1) = \varphi(1)^n$ είναι ένας
μονομορφισμός ομάδων.

ΛΥΣΗ

Έστω τυχαία n και m εν $\mathbb{Z}_4$

$$\varphi(n+m) = \varphi((n+m)\cdot 1) = \varphi(1)^{n+m} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+m} = \begin{bmatrix} i^{n+m} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\varphi(n)\cdot\varphi(m) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} i^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i^m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^{n+m} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Άρα, αφού έχουμε ισότητα μεταξύ των (1) και (2), η φ θα είναι ομομορφισμός ομάδων

Έστω τώρα $\varphi(n) = \varphi(m) \Rightarrow \varphi(1)^n = \varphi(1)^m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m \Rightarrow \begin{bmatrix} i^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i^n = i^m \xRightarrow{n,m\in\mathbb{Z}_4} n = m$$ Άρα, η φ 1-1

Συναληθευτικά, η φ μονομορφισμός

Άσκηση 5: Για τους παρακάτω ομομορφισμούς να βρεθεί ο πυρήνας τους. (Αν θέλετε μπορείτε νδο είναι ομομορφισμοί)

i) $\varphi: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ τύπου $\varphi(x) = |x|$ (πολ/μός)

ii) $\varphi': \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$ τύπου $\varphi([z]_6) = [z]_2$

iii) $\varphi'': \mathbb{R} \to GL(2,\mathbb{R})$ τύπου $\varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

i) $\ker(\varphi) = \{x\in\mathbb{R}^* : \varphi(x) = 1\} = \{x\in\mathbb{R}^* : |x| = 1\} = \{\pm 1\}$

ii) $\ker(\varphi') = \{[z]_6 \in \mathbb{Z}_6 : \varphi([z]_6) = [0]_2\} = \{[z]_6\in\mathbb{Z}_6 : [z]_2 = [0]_2\} =$
$= \{[z]_6\in\mathbb{Z}_6 : z \equiv 0 \bmod 2\} = \{[z]_6\in\mathbb{Z}_6 : z/2\} = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$

iii) $\ker(\varphi'') = \{x\in\mathbb{R} : \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2\} = \{x\in\mathbb{R} : x = 0\} = \{0\}$.

Άσκηση 6: Έστω $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός ομάδων
Τότε ο πυρήνας $\ker(\varphi) \trianglelefteq O$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι αν $S \leq G$ και $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός τότε $\varphi^{-1}(S) \leq G$. Έτσι και εδώ, όπως το $\{e_G\} \leq G$ και $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός τότε $\varphi^{-1}(\{e_G\}) = \ker(\varphi) \leq G$, ή όταν β' τρόπος
Έστω τώρα τυχαία $a, b \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(a) = e_G$ & $\varphi(b) = e_G$ και τότε $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) = e_G \Rightarrow a \cdot b \in \ker(\varphi)$
Δηλαδή, η πράξη στο $\ker(\varphi)$ είναι κλειστή.
Έστω τώρα $a \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(a) = e_G \Rightarrow \varphi(a)^{-1} = e_G \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = e_G$
$\Rightarrow a^{-1} \in \ker(\varphi)$. Άρα και πάλι $\ker(\varphi) \leq G$
Ας είναι τώρα τυχαία $a \in \ker(\varphi)$ και $b \in O$ και δδο
$\ker(\varphi) \trianglelefteq O \Leftrightarrow (\forall a \in \ker(\varphi))(\forall b \in O): bab^{-1} \in \ker\varphi$
$\varphi(bab^{-1}) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b^{-1}) \xlongequal{a \in \ker(\varphi)} \varphi(b) e_G \varphi(b^{-1}) = \varphi(b) \cdot \varphi(b)^{-1} = e_G$
Επομένως, $\varphi(bab^{-1}) = e_G \Rightarrow bab^{-1} \in \ker(\varphi)$

Άσκηση 7. Έστω $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός. Τότε η φ 1-1 α.ν.ν ο πυρήνας $\ker(\varphi) = \{e_O\}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $\varphi: O \to G$ μονομορφισμός και δδο $\ker(\varphi) = \{e_G\}$
$\ker(\varphi) = \{x \in O : \varphi(x) = e_G\}$
Έστω τυχόν $a \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(a) = e_G$
Αλλά, αφού $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός τότε "στέλνει" το μοναδιαίο της O στο μοναδιαίο της G. Δηλαδή $\varphi(e_O) = e_G$
Αλλά, αφού $\varphi: O \to G$ 1-1 τότε αναγκαστικά $a = e_O$
Συνεπώς $\ker(\varphi) = \{e_O\}$
Αντίστροφα,
Έστω $\ker(\varphi) = \{e_O\}$ και δδο φ μονομορφισμός (ή 1-1)
Έστω για τυχαία $a, b \in O$: $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} = e_G \Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) = e_G \xRightarrow{\varphi \text{ ομομ.}}$
$\Rightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = e_G \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in \ker(\varphi) = \{e_O\} \Rightarrow$
$\Rightarrow a \cdot b^{-1} = e_O \Rightarrow a = b \Rightarrow \varphi$ 1-1.

Άσκηση 8: Να εξετάσετε αν υπάρχει μή τετριμμένος ομομορφισμός $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_5$

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\exists\, \varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_5$ ομομορφισμός μή τετριμμένος

α' τρόπος: Αφού $\mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{1} \rangle$ και φ ομομορφισμός συνεπάγεται ότι η φ καθορίζεται από το $\varphi(\bar{1})$ και επαγωγικά βλέπαμε ότι $\varphi(\bar{1}+\bar{1}) = \varphi(\bar{2}) = \varphi(\bar{1}) \oplus \varphi(\bar{1}) = 2\varphi(\bar{1})$ και γενικά $\varphi(\bar{k}) = k\varphi(\bar{1}) \in \mathbb{Z}_5$. Εάν τώρα $\varphi(\bar{1}) = \bar{0} \Rightarrow \varphi(\bar{k}) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_{12}$ και τότε ο φ τετριμμένος ($\lightning$).

Έστω $f(\bar{1}) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow f(\bar{0}) = f(\bar{12}) = \bar{12} \equiv \bar{2} \neq \bar{0}$ ($\lightning$) ($\varphi(\bar{0}) = 0$)

όμοια εάν $\varphi(\bar{1}) = \bar{2}$ ή $\bar{3}$ ή $\bar{4} \in \mathbb{Z}_5$. ($\lightning$)

β' τρόπος: $\ker(\varphi) \leq G$ τότε εκ του Θεωρ. Lagrange $|\ker(\varphi)| \mid |G| = 12$. Εάν $|\ker(\varphi)| = 12 \Rightarrow Im(\varphi) = \{e\}$ και άρα τετριμμένος ($\lightning$). Εάν $|\ker(\varphi)| = 6, 4, 3, 2$ τότε από Θεώρημα ισομορφισμών: $|Im(\varphi)| = 2, 3, 4, 6$ αντίστοιχα. Αλλά, $Im(\varphi) \leq G$ και άρα $|Im(\varphi)| \mid 5$ ($\lightning$).